Analysis Mathematica, **34**(2008), 83–103
DOI: 10.1007/s10476-008-0201-y

Эквивалентные нормировки пространств функций, ассоциированных с обобщенным сдвигом Гегенбауэра

В. С. ГУЛИЕВ и Э. Дж. ИБРАГИМОВ

Вагиф Сабироглы Гулиев, Бакинский государственный университет, Институт математики и механики, Национальной академии наук Азербайджана, e-mail: vagif@guliyev.com

Эльман Джаванширoглы Ибрагимов, Азербайджанская государственная нефтяная академия, e-mail: elmanibrahimov@yahoo.com

Поступило 26 декабря 2006 г., переработанный вариант – 26 сентября 2007 г.

Резюме. В работе найдена формула Тейлора–Дельсарта для функций обобщенного сдвига Гегенбауэра. С помощью формулы Тейлора–Дельсарта для функций обобщенного сдвига Гегенбауэра построена некоторая величина, играющая роль модуля гладкости k-го порядка (при $k = 1$ эта величина совпадает с модулем непрерывности первого порядка), ассоциированная с обобщенным сдвигом Гегенбауэра. С помощью этой величины и K-функционала Петре получена интерполяционная теорема. Получены также эквивалентные нормировки пространств функций, ассоциированных с обобщенным сдвигом Гегенбауэра.

1. Введение

В классической теории приближений функций на $\mathbb{R}$ большую роль играет оператор сдвига

$$f(t) \to f(t+s), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

и связанная с ним техника анализа Фурье. Сдвиги образуют однопараметрическую группу изометрий банаховых пространств (БП) $L_p(\mathbb{R})$ или $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Многие задачи теории приближений распространены и на абстрактную ситуацию, когда в произвольном БП имеется однопараметрическая группа или полугруппа операторов (см. [2, 16]). Другим естественным обобщением операторов сдвига

0133–3852/\$ 20.00

на $\mathbb{R}$ являются операторы обобщенного сдвига (ООС) Дельсарта–Левитана (см. [3, 4, 8, 9]). Следует отметить, что ООС порождаются соответствующими дифференциальными операторами Бесселя, Якоби, Эрмита, Лагерра и т.д. и являются следствиями так называемых »теорем сложения« для собственных функций этих операторов. Поэтому представляется более естественным изучение структурной и конструктивной характеристики класса функций в терминах ООС. В настоящее время имеется большое количество работ, в которых дается описание структурной и конструктивной характеристики класса функций в терминах обобщенного модуля гладкости порожденной ООС. Используя ООС устанавливаются прямые и обратные теоремы теории приближений (см., напр. [1, 6, 11–15, 17]).

В данной работе получены аналоги некоторых результатов работы [10]. Найдена формула Тейлора–Дельсарта для функций обобщенного сдвига Гегенбауэра. С помощью формулы Тейлора–Дельсарта для функций обобщенного сдвига Гегенбауэра построена некоторая величина играющая роль модуля гладкости k-го порядка (при $k = 1$ эта величина совпадает с модулем непрерывности первого порядка), ассоциированная с обобщенным сдвигом Гегенбауэра. С помощью этой величины и K-функционала Петре получена интерполяционная теорема. Получены также эквивалентные нормировки пространств функций, ассоциированных с обобщенным сдвигом Гегенбауэра.

2. Определения и обозначения

Функции Гегенбауэра

$$P_\alpha^\lambda(x), \qquad \alpha \in [1, \infty),\ x \in [1, \infty),\ \lambda \in (0, \tfrac{1}{2})$$

являются собственными функциями дифференциального оператора (см. [5])

$$D_\lambda = (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx} (x^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\,. \tag{1}$$

Функция обобщенного сдвига, порожденная оператором D_λ, имеет вид

$$A_t f(x) \equiv A_t^\lambda f(x) = C_\lambda \int_0^\pi f((x,t)_\varphi)\, d\mu_\lambda(\varphi), \tag{2}$$

где

$$C_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda)}, \qquad d\mu_\lambda(\varphi) = (\sin\varphi)^{2\lambda-1}\,d\varphi,$$

$$(x,t)_\varphi = xt - \sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}\cos\varphi.$$

Обозначим через

$$L_{p,\lambda}[1,\infty) \equiv L_p([1,\infty), dm_\lambda), \qquad 1 \le p \le \infty$$

класс функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\lambda} = (\int_1^\infty |f(x)|^p\,dm_\lambda(x))^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\lambda} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[1,\infty)} |f(x)|,$$

где

$$dm_\lambda(x) = (x^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Положим

$$\theta(s,\sigma) = \begin{cases} -\int_\sigma^s (u^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,du, & \text{если } 1 < \sigma < s, \\ 0, & \text{если } \sigma \ge s, \end{cases}$$

(3)

$$C_1(\operatorname{ch} s) = -\int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s,\sigma)\,dm_\lambda(\sigma) = \int_1^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \int_1^t dm_\lambda(\sigma)\,dt.$$

Покажем, что

$$D_\lambda C_1(\operatorname{ch} s) = 1.$$

Из (1) и (3) имеем

$$(\operatorname{sh} s)C_1'(\operatorname{ch} s) = (\operatorname{sh} s)(\operatorname{ch}^2 s - 1)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \int_1^{\operatorname{ch} s} dm_\lambda(t)$$

или

$$C_1'(\operatorname{ch} s) = (\operatorname{sh} s)^{-2\lambda-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} dm_\lambda(t). \tag{4}$$

Отсюда имеем

$$(\operatorname{sh} s)C_1''(\operatorname{ch} s) = -(2\lambda+1)(\operatorname{sh} s)^{-2\lambda-2}\operatorname{ch} s \int_1^{\operatorname{ch} s} dm_\lambda(t) + (\operatorname{sh} s)^{-1},$$

или

$$(\operatorname{sh}^2 s)C_1''(\operatorname{ch} s) = -(2\lambda+1)(\operatorname{sh} s)^{-2\lambda-1}\operatorname{ch} s \int_1^{\operatorname{ch} s} dm_\lambda(t) + 1. \tag{5}$$

Умножив (4) на $(2\lambda+1)\operatorname{ch} s$ и сложив с (5), получим

$$(\operatorname{sh}^2 s)C_1''(\operatorname{ch} s) + (2\lambda+1)(\operatorname{ch} s)C_1'(\operatorname{ch} s) = 1,$$

что равносильно
$$D_\lambda C_1(\operatorname{ch} s) = 1.$$

Положим $C_0 = 1$ и

(6)
$$C_n(\operatorname{ch} s) = -\int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) C_{n-1}(\sigma)\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= \int_1^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\, dt \int_1^t C_{n-1}(\sigma)\, dm_\lambda(\sigma), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Покажем, что
$$D_\lambda C_n(\operatorname{ch} s) = C_{n-1}(\operatorname{ch} s), \qquad n = 1, 2, \dots ,$$
$$(\operatorname{sh} s) C_n'(\operatorname{ch} s) = (\operatorname{ch}^2 s - 1)^{-\lambda-\frac{1}{2}} (\operatorname{sh} s) \int_1^{\operatorname{ch} s} C_{n-1}(t)\, dm_\lambda(t),$$
или

(7)
$$C_n'(\operatorname{ch} s) = (\operatorname{sh} s)^{-2\lambda-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} C_{n-1}(t)\, dm_\lambda(t).$$

Отсюда находим

(8)
$$(\operatorname{sh}^2 s) C_n''(\operatorname{ch} s) =$$
$$= -(2\lambda+1)(\operatorname{sh} s)^{-2\lambda-1} (\operatorname{ch} s) \int_1^{\operatorname{ch} s} C_{n-1}(t)\, dm_\lambda(t) + C_{n-1}(\operatorname{ch} s).$$

Умножив (6) на $(2\lambda+1)\operatorname{ch} s$ и сложив с(7), получим
$$(\operatorname{sh}^2 s) C_n''(\operatorname{ch} s) + (2\lambda+1)(\operatorname{ch} s) C_n'(\operatorname{ch} s) = C_{n-1}(\operatorname{ch} s), \qquad n = 1, 2, \dots ,$$
что равносильно
$$D_\lambda C_n(\operatorname{ch} s) = C_{n-1}(\operatorname{ch} s), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Рассмотрим функции

(9)
$$R_1(\operatorname{ch} s) f(x) = \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)(A_\sigma D_\lambda f(x))\, dm_\lambda(\sigma),$$

(10)
$$R_k(\operatorname{ch} s) f(x) = \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)(R_{k-1}(\sigma) D_\lambda f(x))\, dm_\lambda(\sigma), \qquad k = 2, 3, \dots .$$

В дальнейшем нам понадобятся вспомогательные утверждения, которые представляют и самостоятельный интерес.

3. Вспомогательные утверждения

Л е м м а 1. *Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[1, \infty)$ и в точке $x_0 \in [1, \infty)$ имеет конечные производные до второго порядка включительно, то в этой точке справедливо равенство*
$$\lim_{t \to 0} \frac{A^\lambda_{\operatorname{ch} t} f(x_0) - f(x_0)}{\operatorname{ch} t - 1} = \frac{x_0^2 - 1}{2\lambda+1} f''(x_0) + x_0 f'(x_0) \equiv \frac{D_\lambda f(x_0)}{2\lambda+1}\, .$$

Доказательство. Обозначим
$$\psi(t) = A^{\lambda}_{\operatorname{ch} t} f(x_0).$$
Пусть
$$u = x_0 \operatorname{ch} t - \sqrt{x_0^2 - 1} \operatorname{sh} t \cos\varphi.$$
Положив $x_0 = \operatorname{ch}\alpha$, получим, что
$$u = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch} t - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh} t \cos\varphi.$$
Отсюда следует, что
$$1 \leq \operatorname{ch}(\alpha - t) \leq u \leq \operatorname{ch}(\alpha + t) < \infty.$$
Тогда
$$\psi'(t) = C_\lambda \int_0^\pi \Big(x_0 \operatorname{sh} t - \sqrt{x_0^2 - 1} \operatorname{ch} t \cos\varphi\Big) f'(u)\, d\mu_\lambda(\varphi), \tag{11}$$
$$\psi''(t) = C_\lambda \int_0^\pi \Big(x_0 \operatorname{sh} t - \sqrt{x_0^2 - 1} \operatorname{ch} t \cos\varphi\Big)^2 f''(u)\, d\mu_\lambda(\varphi) + \tag{12}$$
$$+ C_\lambda \int_0^\pi \Big(x_0 \operatorname{ch} t - \sqrt{x_0^2 - 1} \operatorname{sh} t \cos\varphi\Big) f'(u)\, d\mu_\lambda(\varphi).$$
Из (11) и (12) имеем
$$\psi'(0) = -f'(x_0) C_\lambda \sqrt{x_0^2 - 1} \int_0^\pi \cos\varphi\, d\mu_\lambda(\varphi) = 0, \tag{13}$$
а также
$$\psi''(0) = C_\lambda (x_0^2 - 1) f''(x_0) \int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\mu_\lambda(\varphi) + C_\lambda x_0 f'(x_0) \int_0^\pi d\mu_\lambda(\varphi). \tag{14}$$
Учитывая равенства (см. напр., [7, с. 383])
$$C_\lambda \int_0^\pi (\cos\varphi)^k\, d\mu_\lambda(\varphi) = \begin{cases} 0, & k = 2n - 1, \\ \frac{\Gamma(\lambda + \frac12)\Gamma(n + \frac12)}{\Gamma(\frac12)\Gamma(n + \lambda + \frac12)}, & k = 2n \end{cases}$$
в (14), получим
$$\psi''(0) = \frac{x_0^2 - 1}{2\lambda + 1} f''(x_0) + x_0 f'(x_0) = \frac{D_\lambda f(x_0)}{2\lambda + 1}. \tag{15}$$
По формуле Тейлора
$$\psi(t) = \psi(0) + \psi'(0) t + \frac12 \psi''(0) t^2 + o(t^2), \qquad t \to 0. \tag{16}$$
Учитывая (13) и (15), в (16) будем иметь
$$A^{\lambda}_{\operatorname{ch} t} f(x_0) = f(x_0) + \frac12 \frac{D_\lambda f(x_0)}{2\lambda + 1} t^2 + o(t^2), \qquad t \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{A^{\lambda}_{\operatorname{ch} t}f(x_0)-f(x_0)}{t^2}=\frac{D_\lambda f(x_0)}{2(2\lambda+1)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{A^{\lambda}_{\operatorname{ch} t}f(x_0)-f(x_0)}{4\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}}=\frac{D_\lambda f(x_0)}{2(2\lambda+1)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{A^{\lambda}_{\operatorname{ch} t}f(x_0)-f(x_0)}{\operatorname{ch} t-1}=\frac{D_\lambda f(x_0)}{2\lambda+1}.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Утверждение леммы 1 можно записать в равносильной форме

$$\lim_{t\to 1+0}\frac{A^{\lambda}_{t}f(x_0)-f(x_0)}{t-1}=\frac{D_\lambda f(x_0)}{2\lambda+1}.$$

Лемма 2. *Если* $f\in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1\le p\le\infty$, *то для любого* $t\in[1,\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\|A^\lambda_t f\|_{p,\lambda}\le \|f\|_{p,\lambda}.$$

Доказательство. Пусть сначала $p=1$, тогда

$$\|A^\lambda_t f\|_{1,\lambda}\le C_\lambda\int_1^\infty\int_0^\pi |f((x,t)_\varphi)|\,d\mu_\lambda(\varphi)\,dm_\lambda(x).$$

Делая во внутреннем интеграле замену переменных

$$z=(x,t)_\varphi,\qquad \cos\varphi=(xt-z)(x^2-1)^{-\frac12}(t^2-1)^{-\frac12},$$

$$d\varphi=(1-x^2-t^2-z^2+2xzt)^{-\frac12}\,dz,$$

$$(\sin\varphi)^{2\lambda-1}=(1-x^2-t^2-z^2+2xzt)^{\lambda-\frac12}(x^2-1)^{\frac12-\lambda}(t^2-1)^{\frac12-\lambda},$$

получим

$$\|A^\lambda_t f\|_{1,\lambda}\le C_\lambda(t^2-1)^{\frac12-\lambda}\times$$

$$\times\int_1^\infty\int_{xt-\sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}}^{xt+\sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}}(1-x^2-t^2-z^2+2xzt)^{\lambda-1}|f(z)|\,dz\,dx.$$

Поскольку

$$xt-\sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}\le z\le xt+\sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow\quad |z-xt|\le\sqrt{x^2-1}\sqrt{t^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow\quad z^2-2xtz+x^2t^2\le x^2t^2-x^2-t^2+1$$

$$\Longleftrightarrow\quad z^2-2xtz\le 1-x^2-t^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2-2xtz+z^2t^2\le 1-x^2-t^2+z^2t^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad (x-zt)^2\le(z^2-1)(t^2-1)$$

$$\Longleftrightarrow\quad |x-zt|\le\sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1}$$

$$\iff \quad zt - \sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1} \le x \le zt + \sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1},$$

то, меняя порядок интегрирования, получим

$$\|A_t^\lambda f\|_{1,\lambda} \le$$

$$\le C_\lambda (t^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \int_1^\infty |f(z)| \int_{zt-\sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1}}^{zt+\sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1}} (1-x^2-t^2-z^2+2xzt)^{\lambda-1}\, dx\, dz.$$

Теперь, учитывая, что

$$\Big(zt + \sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1} - x\Big)\Big(x - zt + \sqrt{z^2-1}\sqrt{t^2-1}\Big) =$$

$$= 1 - x^2 - t^2 - z^2 + 2xtz$$

и используя равенство (см. напр., [7, с. 299])

$$\int_a^b (x-a)^{\mu-1}(b-x)^{\nu-1}\, dx = (b-a)^{\mu+\nu-1} B(\mu,\nu),$$

где $B(\mu,\nu)$ — эйлеров интеграл первого рода, при $\mu = \nu = \lambda$ получим

$$\|A_t^\lambda f\|_{1,\lambda} \le \int_1^\infty |f(z)|\, dm_\lambda(z) = \|f\|_{1,\lambda}.$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. Тогда по неравенству Гельдера имеем

$$\|A_t^\lambda f\|_{p,\lambda} = C_\lambda \Big(\int_1^\infty \Big| \int_0^\pi f\Big((x,t)_\varphi\Big)\, d\mu_\lambda(\varphi)\Big|^p dm_\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \Big(C_\lambda \int_1^\infty \int_0^\pi \Big| f((x,t)_\varphi)\Big|^p d\mu_\lambda(\varphi)\, dm_\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Положив во внутреннем интеграле $z = (x,t)_\varphi$ и поступая как и выше, получим

$$\|A_t^\lambda f\|_{p,\lambda} \le \Big(\int_1^\infty |f(z)|^p\, dm_\lambda(z)\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big\| f \Big\|_{p,\lambda}.$$

Пусть $p = \infty$, тогда

$$\|A_t^\lambda f\|_{\infty,\lambda} \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[1,\infty)} |A_t^\lambda f(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{z\in[1,\infty)} |f(z)| = \|f\|_{\infty,\lambda}.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть $f, g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$. Сверткой этих функций назовем оператор

$$(f * g)(x) = \int_1^\infty g(t) A_t^\lambda f(x)\, dm_\lambda(t). \tag{17}$$

Отметим, что для функций $f, g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ свертка $f * g$ определена при почти всех $x \in [1,\infty)$ и $f * g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$.

Лемма 3. *Для* $f, g \in L_{1,\lambda}[1,\infty)$ *справедливо равенство*

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

Доказательство. Положив $z = (x,t)_\varphi$ в (17) и поступая как и при доказательстве леммы 2, получим

$$(f * g)(x) = C_\lambda \int_1^\infty (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} g(u) \times$$

$$\times \int_{xu-\sqrt{x^2-1}\sqrt{u^2-1}}^{xu+\sqrt{x^2-1}\sqrt{u^2-1}} (1-x^2-u^2-z^2+2xzu)^{\lambda-1} f(z)\, dz\, du =$$

$$= C_\lambda (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \int_1^\infty f(z) \times$$

$$\times \int_{xz-\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1}}^{xz+\sqrt{x^2-1}\sqrt{z^2-1}} (1-x^2-u^2-z^2+2xzu)^{\lambda-1} g(u)\, du\, dz.$$

Положив во внутреннем интеграле $u = (x,z)_\varphi$, получим

$$(f * g)(x) = \int_1^\infty f(z) A_z^\lambda g(x)\, dm_\lambda(z) = (g * f)(x).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для достаточно гладких функций оператор* D_λ *самосопряжен, т.е. справедливо равенство*

$$\int_1^\infty f(x) D_\lambda g(x)\, dm_\lambda(x) = \int_1^\infty g(x) D_\lambda f(x)\, dm_\lambda(x).$$

Доказательство. Согласно лемме 1, с учетом леммы 3 можем написать

$$\int_1^\infty f(x) D_\lambda g(x)\, dm_\lambda(x) =$$

$$= \int_1^\infty f(x) \Big(\lim_{t\to 1+0} \frac{A_t^\lambda g(x) - g(x)}{t-1} \Big)\, dm_\lambda(x) =$$

$$= \lim_{t\to 1+0} \frac{1}{t-1} \int_1^\infty [f(x) A_t^\lambda g(x) - f(x) g(x)]\, dm_\lambda(x) =$$

$$= \lim_{t\to 1+0} \frac{1}{t-1} \int_1^\infty (g(x) A_t^\lambda f(x) - g(x) f(x))\, dm_\lambda(x) =$$

$$= \int_1^\infty g(x) \Big(\lim_{t\to 1+0} \frac{A_t^\lambda f(x) - f(x)}{t-1} \Big)\, dm_\lambda(x) = \int_1^\infty g(x) D_\lambda f(x)\, dm_\lambda(x).$$

Лемма 4 доказана.

В дальнейшем символ

$$\varphi(s) \sim \psi(s) \quad \text{при} \quad s \to a \quad \text{означает, что} \quad \lim_{s\to a} \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = 1.$$

Лемма 5. *Справедливо неравенство*

$$\frac{2^k M(k,\lambda)}{(\operatorname{ch} s+1)^k} (\operatorname{ch} s-1)^k \le C_k(\operatorname{ch} s) \le M(k,\lambda)(\operatorname{ch} s-1)^k, \qquad s \ge 0 \tag{18}$$

и

$$C_k(\operatorname{ch} s) \sim M(k,\lambda)(\operatorname{ch} s-1)^k \qquad \text{при} \quad s \to 0, \tag{19}$$

где

$$M(k,\lambda) = \frac{1}{k!\,(2\lambda+1)(2\lambda+3)\cdots(2\lambda+2k-1)}.$$

Доказательство. Оценим $C_1(\operatorname{ch} s)$ сверху:

$$C_1(\operatorname{ch} s) = \int_1^{\operatorname{ch} s}\int_\sigma^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac12}\,dt\,dm_\lambda(\sigma) = \tag{20}$$

$$= \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma-1)^{\lambda-\frac12}(\sigma+1)^{\lambda-\frac12} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} \frac{(t-1)^{-\lambda-\frac12}}{(t+1)^{\lambda+\frac12}}\,dt\,d\sigma \le$$

$$\le \int_1^{\operatorname{ch} s} \frac{(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}(\sigma+1)^{\lambda-\frac12}}{(\sigma+1)^{\lambda+\frac12}} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} (t-1)^{-\lambda-\frac12}\,dt\,d\sigma =$$

$$= \int_1^{\operatorname{ch} s} \frac{(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}}{\sigma+1} \frac{(t-1)^{\frac12-\lambda}}{\frac12-\lambda}\Big|_\sigma^{\operatorname{ch} s} d\sigma \le$$

$$\le \frac{2}{2(1-2\lambda)} \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma-1)^{\lambda-\frac12}\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda} - (\sigma-1)^{\frac12-\lambda}\Big]\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{1-2\lambda}\Big[(chs-1)^{\frac12-\lambda}\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma - \int_1^{\operatorname{ch} s} d\sigma\Big] =$$

$$= \frac{1}{1-2\lambda}\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda}\frac{(\operatorname{ch} s-1)^{\lambda+\frac12}}{\lambda+\frac12} - (\operatorname{ch} s-1)\Big] =$$

$$= \frac{1}{1-2\lambda}\Big[\frac{2}{2\lambda+1}(\operatorname{ch} s-1) - (\operatorname{ch} s-1)\Big] = \frac{1}{2\lambda+1}(\operatorname{ch} s-1).$$

Теперь оценим $C_1(\operatorname{ch} s)$ снизу

$$C_1(s) = \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac12}\,dt\,d\sigma = \tag{21}$$

$$= \int_1^{\operatorname{ch} s} \frac{(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}}{(\sigma+1)^{\frac12-\lambda}} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} \frac{(t-1)^{-\lambda-\frac12}}{(t+1)^{\lambda+\frac12}}\,dt\,d\sigma \ge$$

$$\geq \frac{1}{\operatorname{ch} s+1}\int_1^{chs}(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}\int_\sigma^{\operatorname{ch} s}(t-1)^{-\lambda-\frac12}\,dt\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} s+1}\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}\frac{(t-1)^{\frac12-\lambda}}{\frac12-\lambda}\Big|_\sigma^{\operatorname{ch} s}\,d\sigma =$$

$$= \frac{2}{1-2\lambda}\,\frac{1}{\operatorname{ch} s+1}\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{\lambda-\frac12}\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda}-(\sigma-1)^{\frac12-\lambda}\Big]\,d\sigma =$$

$$= \frac{2}{1-2\lambda}\,\frac{1}{\operatorname{ch} s+1}\Big[\frac{2}{2\lambda+1}(\operatorname{ch} s-1)-(\operatorname{ch} s-1)\Big] = \frac{2}{2\lambda+1}\frac{\operatorname{ch} s-1}{\operatorname{ch} s+1}\,.$$

Из (20) и (21) получаем, что

$$\frac{2}{2\lambda+1}\frac{\operatorname{ch} s-1}{\operatorname{ch} s+1}\leq C_1(\operatorname{ch} s)\leq\frac{\operatorname{ch} s-1}{2\lambda+1}$$

и

$$C_1(\operatorname{ch} s)\sim\frac{\operatorname{ch} s-1}{2\lambda+1}\qquad\text{при}\quad s\to 0,$$

т.е. утверждение леммы 5 справедливо при $k=1$.

Допустим, что неравенство (18) справедливо при $k=m$, т.е.

$$\frac{2^m M(m,\lambda)}{(\operatorname{ch} s+1)^m}(\operatorname{ch} s-1)^m\leq C_m(\operatorname{ch} s)\leq M(m,\lambda)(\operatorname{ch} s-1)^m. \tag{22}$$

Учитывая правую часть последнего неравенства и (6), будем иметь

$$C_{m+1}(\operatorname{ch} s)\leq \tag{23}$$

$$\leq M(m,\lambda)\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}(\sigma-1)^m\int_\sigma^{\operatorname{ch} s}(t^2-1)^{-\lambda-\frac12}\,dt\,d\sigma =$$

$$= M(m,\lambda)\int_1^{\operatorname{ch} s}\frac{(\sigma-1)^{m+\lambda-\frac12}}{(\sigma+1)^{\frac12-\lambda}}\int_\sigma^{\operatorname{ch} s}\frac{(t-1)^{-\lambda-\frac12}}{(t+1)^{\lambda+\frac12}}\,dt\,d\sigma\leq$$

$$\leq M(m,\lambda)\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{m+\lambda-\frac12}\frac{(t-1)^{\frac12-\lambda}}{\frac12-\lambda}\Big|_\sigma^{\operatorname{ch} s}\,d\sigma =$$

$$= M(m,\lambda)\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{m+\lambda-\frac12}\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda}-(\sigma-1)^{\frac12-\lambda}\Big]\,d\sigma =$$

$$= M(m,\lambda)\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda}\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^{m+\lambda-\frac12}\,d\sigma-\int_1^{\operatorname{ch} s}(\sigma-1)^m\,d\sigma\Big] =$$

$$= M(m,\lambda)\Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac12-\lambda}\frac{(\sigma-1)^{m+\lambda+\frac12}}{m+\lambda+\frac12}\Big|_1^{\operatorname{ch} s}-\frac{(\sigma-1)^{m+1}}{m+1}\Big|_1^{\operatorname{ch} s}\Big] =$$

$$= M(m,\lambda)\Big[\frac{2(\operatorname{ch} s-1)^{m+1}}{2\lambda+2m+1}-\frac{(\operatorname{ch} s-1)^{m+1}}{m+1}\Big] =$$

$$= M(m+1,\lambda)(\operatorname{ch} s - 1)^{m+1}.$$

А из левой части неравенства (22) и (6) получаем

$$C_{m+1}(\operatorname{ch} s) \geq \tag{24}$$

$$\geq 2^m M(m,\lambda) \int_1^{\operatorname{ch} s} \frac{(\sigma-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}(\sigma-1)^m}{(\sigma+1)^m} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\, dt\, d\sigma =$$

$$= 2^m M(m,\lambda) \int_1^{\operatorname{ch} s} \frac{(\sigma-1)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}}{(\sigma+1)^{m+\frac{1}{2}-\lambda}} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} \frac{(t-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(t+1)^{\lambda+\frac{1}{2}}}\, dt\, d\sigma \geq$$

$$\geq \frac{2^m M(m,\lambda)}{(\operatorname{ch} s+1)^{m+1}} \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma-1)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \int_\sigma^{\operatorname{ch} s} (t^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\, dt\, d\sigma =$$

$$= \frac{2^m M(m,\lambda)}{(\operatorname{ch} s+1)^{m+1}} \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma-1)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\frac{1}{2}-\lambda}\Big|_\sigma^{\operatorname{ch} s} d\sigma =$$

$$= \frac{2^{m+1} M(m,\lambda)}{(1-2\lambda)(\operatorname{ch} s+1)^{m+1}} \int_1^{\operatorname{ch} s} (\sigma-1)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \Big[(\operatorname{ch} s-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} - (\sigma-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}\Big]\, d\sigma =$$

$$= \frac{2^{m+1} M(m+1,\lambda)}{(\operatorname{ch} s+1)^{m+1}} (\operatorname{ch} s-1)^{m+1}.$$

Из (23) и (24) следует, что неравенство (18) верно при $k = m+1$, но тогда, согласно принципу математической индукции, оно верно и при любом k.

Легко заметить, что соотношение (19) непосредственно следует из (18). Лемма 5 доказана.

4. Формула Тейлора–Дельсарта

Наподобие того, как операторы сдвига допускают разложение в ряд по степеням оператора дифференцирования, операторы A_t^λ, определенные формулой (2), могут быть разложены по степеням оператора Гегенбауэра D_λ.

Лемма 6. *Если к функции f $(k-1)$ раз применим оператор D_λ, то справедлива формула Тейлора–Дельсарта* (T-D)

$$R_k(\operatorname{ch} s) f(x) = A^\lambda_{\operatorname{ch} s} f(x) - f(x) - \tag{25}$$

$$- C_1(\operatorname{ch} s) D_\lambda f(x) - \cdots - C_{k-1}(\operatorname{ch} s) D_\lambda^{k-1} f(x).$$

Доказательство. Проводим методом математической индукции. Проверим справедливость (25) при $k=1$. Из (8) с учетом леммы 4 будем иметь

$$R_1(\operatorname{ch} s)f(x)=\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)\frac{d}{d\sigma}\Big[(\sigma^2-1)^{\lambda+\frac12}\frac{d}{d\sigma}A_\sigma^\lambda f(x)\Big]\,d\sigma=$$
$$=\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)\,d\Big[(\sigma^2-1)^{\lambda+\frac12}\frac{d}{d\sigma}A_\sigma^\lambda f(x)\Big]=$$
$$=\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)(\sigma^2-1)^{\lambda+\frac12}\frac{d}{d\sigma}A_\sigma^\lambda f(x)\Big|_1^{\operatorname{ch} s}+$$
$$+\int_1^{\operatorname{ch} s}\frac{d}{d\sigma}A_\sigma^\lambda f(x)\,d\sigma=A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x)-f(x).$$

Итак, при $k=1$ равенство (25) доказано.

Допустим, что равенство (25) справедливо при $k=m$, тогда получим

$$R_{m+1}(\operatorname{ch} s)f(x)=\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)(R_m(\sigma)D_\lambda f(x))(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma=$$
$$=\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)D_\lambda\Big(A_\sigma^\lambda f(x)-f(x)-C_1(\operatorname{ch} s)D_\lambda^1 f(x)-$$
$$-\cdots-C_{m-1}(\operatorname{ch} s)D_\lambda^{m-1}f(x)\Big)(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma=$$
$$=\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)(D_\lambda A_\sigma^\lambda f(x))(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma-$$
$$-D_\lambda f(x)\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma-$$
$$-\cdots-D_\lambda^m f(x)\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)C_{m-1}(\sigma)(\sigma^2-1)^{\lambda-\frac12}\,d\sigma=$$
$$=A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x)-f(x)-C_1(\operatorname{ch} s)D_\lambda f(x)-\cdots-C_m(\operatorname{ch} s)D_\lambda^m f(x).$$

Согласно принципу математической индукции формула (25) имеет место при любом k.

Лемма 6 доказана.

Замечание 2. Отметим, что лемма 1 может быть получена как следствие из леммы 6. Действительно, из (25) при $k=1$ имеем

$$R_2(\operatorname{ch} s)f(x)=A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x)-f(x)-C_1(\operatorname{ch} s)D_\lambda f(x).$$

Из (19) следует,что

$$R_2(\operatorname{ch} s)\to 0\quad \text{при}\quad s\to 0,$$

но тогда

$$\lim_{s\to0}\frac{A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x)-f(x)}{C_1(\operatorname{ch} s)}=\lim_{s\to0}\frac{A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x)-f(x)}{\operatorname{ch} s-1}=\frac{D_\lambda f(x)}{2\lambda+1}\,.$$

Лемма 7. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $D_\lambda^k f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $k = 1,2,\dots$, *тогда при любом* $s > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|R_k(\operatorname{ch} s)f\|_{p,\lambda} \le \Big(\frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda+1}\Big)^k \|D_\lambda^k f\|_{p,\lambda}.$$

Доказательство. Оценим норму $R_1(\operatorname{ch} s)f(x)$. Используя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|R_1(\operatorname{ch} s)f\|_{p,\lambda} \le$$
$$\le \int_1^{\operatorname{ch} s} |\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)| \Big(\int_1^\infty |A_\sigma^\lambda D_\lambda f(x)|^p \, dm_\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}} dm_\lambda(\sigma) \le$$
$$\le \sup_{1<\sigma<\operatorname{ch} s} \|A_\sigma^\lambda D_\lambda f\|_{p,\lambda} \int_1^{\operatorname{ch} s} |\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)| \, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= \sup_{1<\sigma<\operatorname{ch} s} \|A_\sigma^\lambda D_\lambda f\|_{p,\lambda} |C_1(\operatorname{ch} s)|.$$

Учитывая здесь лемму 2 и (18) при $k=1$, получим

$$\|A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f - f\|_{p,\lambda} \le \frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda+1}\|D_\lambda f\|_{p,\lambda}. \tag{26}$$

Но тогда последовательно имеем

$$\|R_k(\operatorname{ch} s)f\|_{p,\lambda} \le \frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda+1}\|R_{k-1}(\operatorname{ch} s)D_\lambda f\|_{p,\lambda} \le$$
$$\le \Big(\frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda+1}\Big)^2 \|R_{k-2}(\operatorname{ch} s)D_\lambda^2 f\|_{p,\lambda} \le \dots \le \Big(\frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda+1}\Big)^k \|D_\lambda^k f\|_{p,\lambda}.$$

Лемма 7 доказана.

Следствие 1. *Если* $D_\lambda f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$, *то*

$$\lim_{s\to 0} \Big\| A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f - f \Big\|_{p,\lambda} = 0.$$

5. Интерполяция $(k = 1)$

Пусть X_0 и X_1 — банаховы пространства. Положим

$$K(f,s) = K(f,s;X_0,X_1) = \inf_{f=f_0+f_1} (\|f\|_{X_0} + s\|f_1\|_{X_1}),$$

где

$$f \in X_0 + X_1 \quad \text{и} \quad 0 < s < \infty.$$

Обозначим через $(X_0,X_1)_{\theta,q}$, где $0<\theta<1$, $1<q<\infty$ и $0 \le \theta \le 1$, $q=\infty$, пространство элементов $f \in X_0 + X_1$ таких, что

$$\int_0^{\infty}(s^{-\theta}K(f,s))^q\frac{ds}{s}<\infty, \quad \text{если} \;\; 1\le q<\infty,$$
$$\sup_{0<s<\infty} s^{-\theta}K(f,s)<\infty, \quad \text{если} \;\; q=\infty.$$

Положим

$$\omega(f,s)_{p,\lambda}=\sup_{0<\sigma<s}\|A^{\lambda}_{\operatorname{ch}\sigma}f-f\|_{p,\lambda}.$$

Обозначим $D_{p,\lambda}=L_{p,\lambda}(D_\lambda)$, $1\le p\le\infty$, класс всех функций таких что, $D_\lambda f\in L_{p,\lambda}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{D_{p,\lambda}}:=\|D_\lambda f\|_{p,\lambda}.$$

Символ

$$\alpha(s)\simeq\beta(s) \quad \text{при} \;\; s\to 0,$$

означает, что существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\alpha(s)\le\beta(s)\le C_2\alpha(s).$$

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\omega(f,\sqrt{s})_{p,\lambda}\simeq K(f,s;L_{p,\lambda},D_{p,\lambda}), \quad s\to 0.$$

Таким образом,

$$f\in(L_{p,\lambda},D_{p,\lambda})_{\theta,q} \iff \begin{cases}\int_0^{\infty}(s^{-2\theta}\omega(f,s))^q_{p,\lambda}\frac{ds}{s}<\infty, & 1\le q<\infty,\\ \sup_{0<s<\infty}s^{-2\theta}\omega(f,s)_{p,\lambda}, & q=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть

$$f=f_0+f_1, \quad \text{где} \;\; f_0\in L_{p,\lambda} \text{ и } f_1\in D_{p,\lambda}.$$

Тогда по лемме 2

$$\omega(f,s)_{p,\lambda}\le 2\|f_0\|_{p,\lambda}, \tag{27}$$

и из леммы 7 при $k=1$

$$\omega(f_0,s)_{p,\lambda}\le\frac{\operatorname{ch}s-1}{2\lambda+1}\|D_\lambda f_1\|_{p,\lambda}. \tag{28}$$

Так как

$$\omega(f_1,s)_{p,\lambda}\le\omega(f_0,s)_{p,\lambda}+\omega(f_1,s)_{p,\lambda},$$

то из (27) и (28) имеем

$$\omega(f,s)_{p,\lambda}\le 2\Big(\|f_0\|_{p,\lambda}+(\operatorname{ch}s-1)\|D_\lambda f_1\|_{p,\lambda}\Big).$$

Но тогда по определению $K(f,s)$

$$\omega(f,s)_{p,\lambda}\le 2K(f,\operatorname{ch}s-1). \tag{29}$$

Для доказательства обратного неравенства подберем f_0 и f_1, положив

$$f_1(x) = (C_1(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)(A_\sigma^\lambda f(x))\, dm_\lambda(\sigma),$$
$$f_0 = f - f_1.$$

Тогда из (25) имеем

$$D_\lambda f_1(x) = (C_1(\operatorname{ch} s))^{-1}(A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f(x) - f(x)).$$

Отсюда с учетом леммы 5 при $k = 1$ получим

$$(\operatorname{ch} s - 1)\|D_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \leq (\operatorname{ch} s + 1)\|A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f - f\|_{p,\lambda},$$

откуда следует, что

$$(\operatorname{ch} s - 1)\|D_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \leq (\operatorname{ch} s + 1)\omega(f, s)_{p,\lambda}. \tag{30}$$

С другой стороны,

$$f_0(x) = -(C_1(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)(A_\sigma^\lambda f(x) - f(x))\, dm_\lambda(\sigma).$$

Отсюда имеем

$$\|f_0\|_{p,\lambda} \leq (C_1(\operatorname{ch} s))^{-1} \times \tag{31}$$
$$\times \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)\|A_\sigma^\lambda f - f\|_{p,\lambda}\, dm_\lambda(\sigma) \leq \omega(f, s)_{p,\lambda}.$$

Складывая (30) и (31), получим

$$\|f_0\|_{p,\lambda} + (\operatorname{ch} s - 1)\|D_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \leq (\operatorname{ch} s + 2)\omega(f, s)_{p,\lambda},$$

откуда следует, что

$$K(f, \operatorname{ch} s - 1) \leq (\operatorname{ch} s + 2)\omega(f, s)_{p,\lambda}. \tag{32}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ch} s - 1 \sim 2\operatorname{sh}^2\frac{s}{2} \sim \frac{s^2}{2} \simeq s^2 \qquad \text{при} \quad s \to 0$$

и комбинируя (29) и (32), будем иметь

$$K(f, s^2) \simeq \omega(f, s)_{p,\lambda}, \qquad s \to 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_{p,\lambda}[1, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ и для некоторого $g \in L_{p,\lambda}[1, \infty)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{s \to 0} \|(C_1(\operatorname{ch} s))^{-1}(A_{\operatorname{ch} s}^\lambda f - f) - g\|_{p,\lambda} = 0. \tag{33}$$

Тогда $f \in D_{p,\lambda}$ и $D_\lambda f = g$.

Доказательство. Пусть f_0 и f_1 те же функции, что и в теореме 1. Тогда

$$C_1(\operatorname{ch} s)D_\lambda f_1 = A^\lambda_{\operatorname{ch} s} f - f,$$

следовательно, $f_1 \in D_{p,\lambda}$ и

$$\|f_0\|_{p,\lambda} + (\operatorname{ch} s - 1)\|f_1\|_{D_{p,\lambda}} \le 2\omega(f,s)_{p,\lambda}. \tag{34}$$

Из условий теоремы (33) и неравенства (18) следует, что

$$\omega(f,s)_{p,\lambda} = O(\operatorname{ch} s - 1), \qquad s \to 0.$$

Тогда из (34) имеем

$$f_0 \to 0 \ \text{ в } \ L_{p,\lambda} \quad \text{ при } \ s \to 0,$$
$$f_1 \to f \ \text{ в } \ L_{p,\lambda} \quad \text{ при } \ s \to 0,$$

поскольку

$$\|f_0\|_{p,\lambda} = \|f - f_1\|_{p,\lambda}.$$

С другой стороны,

$$D_\lambda f_1 = (C_1(\operatorname{ch} s))^{-1}(A^\lambda_{\operatorname{ch} s} f - f) \to g \ \text{ в } \ L_{p,\lambda} \quad \text{ при } \ s \to 0.$$

Но тогда в силу замкнутости оператора D_λ в $L_{p,\lambda}$ мы имеем $D_\lambda f = g$. Таким образом, $f \in D_{p,\lambda}$ и $D_\lambda f = g$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Если* $\omega(f,s)_{p,\lambda} = o(s^2)$, $s \to 0$, *то* $D_\lambda f = 0$.

6. Интерполяция ($k \ge 2$)

Положим $D^k_{p,\lambda} = D_{p,\lambda}(D^k_\lambda)$, $k \ge 1$. Обозначим норму $f \in D^k_{p,\lambda}$ через

$$\|f\|_{D^k_{p,\lambda}} = \|D^k_\lambda f\|_{p,\lambda}.$$

Положим

$$\Box_k\,(f,s)_{p,\lambda} = \sup_{0<\sigma<s} \|R_k(\operatorname{ch}\sigma) f\|_{p,\lambda}.$$

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$s^{1-k}\,\Box_k\,(f,\sqrt{s})_{p,\lambda} \simeq K(f,s;D^{k-1}_{p,\lambda},D^k_{p,\lambda}), \qquad s \to 0. \tag{35}$$

Таким образом, мы имеем

$$f \in (D^{k-1}_{p,\lambda},D^k_{p,\lambda})_{\theta,q}$$
$$\iff \quad \begin{cases} \int_0^\infty (s^{2(1-k-\theta)}\,\Box_k\,(f,s)_{p,\lambda})^q \frac{dt}{t} < \infty, & \text{если } \ 1 \le q < \infty, \\ \sup_{0<s<\infty} s^{2(1-k-\theta)}\,\Box_k\,(f,s)_{p,\lambda} < \infty, & \text{если } \ q = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Если

$$f = f_0 + f_1, \qquad f_0 \in D^{k-1}_{p,\lambda}, \quad f_1 \in D^k_{p,\lambda},$$

то из леммы 7 имеем

$$\square_k\ (f_1, s)_{p,\lambda} \le \Big(\frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda + 1}\Big)^k \|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \le (\operatorname{ch} s - 1)^k \|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda}. \tag{36}$$

С другой стороны, по лемме 6

$$R_k(\operatorname{ch}\sigma) f_0(x) = R_{k-1}(\operatorname{ch}\sigma) f_0(x) - C_{k-1}(\operatorname{ch}\sigma) D^{k-1}_\lambda f_0(x). \tag{37}$$

Откуда имеем

$$\|R_k(\operatorname{ch}\sigma) f_0\|_{p,\lambda} \le \|R_{k-1}(\operatorname{ch}\sigma) f_0\|_{p,\lambda} + C_{k-1}(\operatorname{ch}\sigma)\|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda}.$$

Учитывая здесь леммы 5 и 7, получим

$$\square_k\ (f_0, s)_{p,\lambda} \le \Big(\frac{\operatorname{ch} s - 1}{2\lambda + 1}\Big)^{k-1} \|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} + \tag{38}$$

$$+ M(k-1, \lambda)(\operatorname{ch} s - 1)^{k-1} \|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} \le (\operatorname{ch} s - 1)^{k-1} \|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda}.$$

Из (36) и (38) имеем

$$\square_k\ (f, s) \le (\operatorname{ch} s - 1)^{k-1} \Big(\|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} + (\operatorname{ch} s - 1)\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda}\Big) = \tag{39}$$

$$= 2(\operatorname{ch} s - 1)^{k-1} K(f, \operatorname{ch} s - 1).$$

Для обратимости неравенства (39) введем величину

$$J_1(\operatorname{ch} s) f(x) = \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) A^\lambda_\sigma f(x)\, dm_\lambda(\sigma), \tag{40}$$

$$J_n(\operatorname{ch} s) f(x) = \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) J_{n-1}(\sigma) f(x)\, dm_\lambda(\sigma).$$

Из (9) и (10) следует, что

$$D^k_\lambda J_k(\operatorname{ch} s) f(x) = R_k(\operatorname{ch} s) f(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{41}$$

Положим

$$f_1(x) = (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} J_k(\operatorname{ch} s) f(x), \tag{42}$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Из (41) и (42) имеем

$$\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} = (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \|R_k(\operatorname{ch} s) f\|_{p,\lambda} \le (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1}\, \square_k\ (f, s)_{p,\lambda}.$$

Учитывая здесь лемму 5, получим

$$\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \le \frac{(\operatorname{ch} s + 1)^k}{2^k M(k, \lambda)} (\operatorname{ch} s - 1)^{-k}\, \square_k\ (f, s)_{p,\lambda}.$$

Отсюда имеем

$$(\operatorname{ch} s - 1)\|D_\lambda^k f_1\|_{p,\lambda} \le \frac{(\operatorname{ch} s + 1)^k}{2^k M(k,\lambda)} (\operatorname{ch} s - 1)^{1-k} \,\square_k\, (f,s)_{p,\lambda}. \tag{43}$$

Теперь, используя (40), (37) и (41), получим

$$D_\lambda^{k-1} f_0(x) = D_\lambda^{k-1} f(x) - (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} D_\lambda^{k-1} J_k(\operatorname{ch} s) f(x) =$$
$$= D_\lambda^{k-1} f(x) - (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)(D_\lambda^{k-1} J_{k-1}(\sigma) f(x))\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= D_\lambda^{k-1} f(x) - (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \times$$
$$\times \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)\Big[D_\lambda^{k-1} J_{k-1}(\sigma) f(x) - C_{k-1}(\sigma) D_\lambda^{k-1} f(x)\Big]\, dm_\lambda(\sigma) -$$
$$- (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) C_{k-1}(\sigma) D_\lambda^{k-1} f(x)\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= D_\lambda^{k-1} f(x) - D_\lambda^{k-1} f(x) (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) C_{k-1}(\sigma)\, dm_\lambda(\sigma) -$$
$$- (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma)\Big[J_{k-1}(\sigma) - C_{k-1}(\sigma)\Big] D_\lambda^{k-1} f(x)\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= -(C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) \times$$
$$\times \Big[R_{k-1}(\operatorname{ch} s) f(x) - C_{k-1}(\sigma) D_\lambda^{k-1} f(x)\Big]\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= -(C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} \int_1^{\operatorname{ch} s} \theta(\operatorname{ch} s, \sigma) R_k(\operatorname{ch} s) f(x)\, dm_\lambda(\sigma) =$$
$$= -(C_k(\operatorname{ch} s))^{-1} C_1(\operatorname{ch} s) R_k(\operatorname{ch} s) f(x).$$

Отсюда имеем

$$\|D_\lambda^{k-1} f_0\|_{p,\lambda} \le |C_k(\operatorname{ch} s)|^{-1} |C_1(\operatorname{ch} s)| \,\square_k\, (f,s)_{p,\lambda}.$$

Учитывая здесь лемму 5, получим

$$\|D_\lambda^{k-1} f_0\|_{p,\lambda} \le \frac{(\operatorname{ch} s + 1)^k}{2^k M(k,\lambda)} (\operatorname{ch} s - 1)^{1-k} \,\square_k\, (f,s)_{p,\lambda}. \tag{44}$$

Складывая (43) и (44), получим

$$\|D_\lambda^{k-1} f_0\|_{p,\lambda} + (\operatorname{ch} s - 1)\|D_\lambda^k f_1\|_{p,\lambda} \le \frac{(\operatorname{ch} s + 1)^k}{2^{k-1} M(k,\lambda)} (\operatorname{ch} s - 1)^{1-k} \,\square_k\, (f,s)_{p,\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$K(f, \operatorname{ch} s - 1) \le \frac{(\operatorname{ch} s + 1)^k}{2^k M(k,\lambda)} (\operatorname{ch} s - 1)^{1-k} \,\square_k\, (f,s)_{p,\lambda}. \tag{45}$$

Утверждение теоремы вытекает из (39) и (45), если учесть, что

$$\operatorname{ch} s - 1 \simeq s^2.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если* $f \in D^{k-1}_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$ *и для* $g \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$

$$\lim_{s\to 0}\Big\|\frac{R_k(\operatorname{ch} s)f}{C_k(\operatorname{ch} s)} - g\Big\|_{p,\lambda} = 0, \tag{46}$$

то

$$f \in D^k_{p,\lambda} \quad \text{и} \quad D^k_\lambda f = g.$$

Доказательство. Положим $f = f_0 + f_1$, где

$$D^{k-1}_\lambda f_1(x) = (C_k(\operatorname{ch} s))^{-1}\int_1^{\operatorname{ch} s}\theta(\operatorname{ch} s,\sigma)(R_{k-1}(\sigma)f(x))\,dm_\lambda(\sigma),$$

$$D^{k-1}_\lambda f_0 = D^{k-1}_\lambda f - D^{k-1}_\lambda f_1.$$

Отсюда следует, что

$$C_k(\operatorname{ch} s)D^k_\lambda f_1 = R_k(\operatorname{ch} s)f$$

и

$$C_k(\operatorname{ch} s)\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} = \|R_k(\operatorname{ch} s)\|_{p,\lambda} \le \square_k\,(f,s)_{p,\lambda} \tag{47}$$

Из условий теоремы (46) и неравенства (18) следует, что

$$\square_k\,(f,s)_{p,\lambda} = O(\operatorname{ch} s - 1)^k, \qquad s \to 0. \tag{48}$$

Далее, так как

$$C_{k-1}(\operatorname{ch} s)D^{k-1}_\lambda f_1 = R_{k-1}(\operatorname{ch} s)f,$$

то

$$C_{k-1}(\operatorname{ch} s)D^{k-1}_\lambda f_0 = C_{k-1}(\operatorname{ch} s)D^{k-1}_\lambda f - R_{k-1}(\operatorname{ch} s)f =$$
$$= -(R_{k-1}(\operatorname{ch} s)f - C_{k-1}(\operatorname{ch} s)D^{k-1}_\lambda f) = -R_k(\operatorname{ch} s)f.$$

Отсюда следует, что

$$D^{k-1}_\lambda f_0 = -(C_{k-1}(\operatorname{ch} s))^{-1}R_k(\operatorname{ch} s)f, \tag{49}$$

Из (47) и (49) следует, что

$$\|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} + (C_{k-1}(\operatorname{ch} s))^{-1}C_k(\operatorname{ch} s)\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \le$$
$$\le 2(C_{k-1}(\operatorname{ch} s))^{-1}\,\square_k\,(f,s)_{p,\lambda}.$$

Учитывая здесь лемму 5 и неравенство (45), получим

$$\|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} + \frac{C_k(\operatorname{ch} s)}{C_{k-1}(\operatorname{ch} s)}\|D^k_\lambda f_1\|_{p,\lambda} \le \tag{50}$$
$$\le \frac{(\operatorname{ch} s+1)^{k-1}}{2^{k-2}M(k-1,\lambda)}(\operatorname{ch} s - 1)^{1-k}\,\square_k\,(f,s)_{p,\lambda}.$$

Из (48) и (50) следует, что

$$\|D^{k-1}_\lambda f_0\|_{p,\lambda} \to 0 \quad \text{при} \;\; s \to 0,$$

но тогда

$$\|D_\lambda^{k-1} f - D_\lambda^{k-1} f_1\|_{p,\lambda} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 0.$$

С другой стороны,

$$D_\lambda^k f_1 = \frac{R_k(\operatorname{ch} s) f}{C_k(\operatorname{ch} s)} \to g \quad \text{в} \quad L_{p,\lambda}[1,\infty).$$

А потому в силу замкнутости оператора D_λ,

$$D_\lambda^k f \in L_{p,\lambda}[1,\infty) \quad \text{и} \quad D_\lambda^k f = g.$$

Теорема 4 доказана.

Следствие 3. *Пусть* $f \in L_{p,\lambda}[1,\infty)$, $1 \le p < \infty$. *Если*

$$\square_k\ (f,s)_{p,\lambda} = o(s^{2k}), \quad s \to 0,$$

то $D_\lambda^k f = 0$.

В заключение авторы приносят благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

Литература

[1] Д. В. Алексеев, *Приближение функций одной и нескольких действительных переменных с весом Чебышева–Эрмита*, Канд. дис., МГУ (Москва, 2006).

[2] P. L. Butzer and H. Behrens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer (Berlin–Heidelberg–New York, 1967).

[3] J. Delsarte, Sur une extension de la formule Taylor, *J. Math. Pures Appl.*, **17**(1936), 213–231.

[4] J. Delsarte, Une extension nouvelle de la theorie des fonctions periodiques de Bohr, *Acta Math.*, **69**(1938), 259–317.

[5] L. Durand, P. M. Fisbone, and L. M. Simmons, Expansion formulas and addition theorems for Gegenbauer functions, *J. Math. Phys.*, **17**(1976), 1933–1948.

[6] Ар. С. Джафаров, Обобщенные модули непрерывности и их связи с наилучшими приближениями. Исследования по теории линейных операторов, *Труды Азербайджанского госуниверситетеа* (1987), 26–49.

[7] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука (Москва, 1971).

[8] Б. М. Левитан, Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, *Успехи матем. наук*, **6**(1951), 102–143.

[9] Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука (Москва, 1973).

[10] L. Löfström and J. Peetre, Approximation theorems connected with generalized translations, *Math. Ann.*, **181**(1969), 255–268.

[11] М. К. Потапов, О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций, *Труды МИАН*, **131**(1974), 211–231.

[12] М. К. Потапов, Прямая и обратная теоремы теории приближений для m-го обобщенного модуля гладкости, *Труды МИАН*, **232**(2001), 289–297.

[13] М. К. Потапов и Г. Н. Казимиров, О приближении алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k-го обобщенного модуля гладкости, *Матем. заметки*, **63**(1998), 425–436.

[14] С. З. Рафальсон, О приближении функций алгебраическими многочленами в метриках L_p, *Доклады АН СССР*, **208**(1973), 545–549.

[15] С. З. Рафальсон, *Некоторые прямые и обратные теоремы о приближении функций в метриках $L_{p,\alpha}$ алгебраическими многочленами*, деп. в ВИНИТИ (1979), 16 стр.

[16] А. П. Терехин, Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение, *Дифференциальные уравнения и вычислительная математика*, Изд-во Саратовского ун-та, (Саратов, 1975), вып. 2, 3–28.

[17] Г. В. Жидков, Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций, *Доклады АН СССР*, **169**(1966), 1002–1005.

On equivalent normalizations of functional spaces associated with the generalized Gegenbauer shift

V. S. GULIEV and E. J. IBRAGIMOV

Taylor–Delsart formula is elaborated in the paper for functions of the generalized Gegenbauer shift. This formula is utilized to construct a version of the Gegenbauer shift modulus of smoothness of order k which for $k = 1$ reduces to the modulus of smoothness of the first order. By means of this modulus and Peetre's K-functional, an interpolation theorem is obtained. Equivalent normalizations are obtained for functional spaces associated with the generalized Gegenbauer shift.